Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №2 пгт. Кировский»
Приморского края

СТАРТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Методическая разработка

Осинцева Наталья Николаевна,
учитель математики

пгт. Кировский

2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ………………………………………………………………………….. 3

ПРИМЕРЫ СТАРТОВЫХ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ……………………. 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ………………………………………………………………… 7

ЛИТЕРАТУРА………………………………………………………………….. 8

ВВЕДЕНИЕ

Пусть дано уравнение с двумя переменными F(x, a) = 0. Если в задаче сформулирована цель: «Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение относительно x», то выражение F(x, a) = 0 называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество A – областью изменения параметра a[1] (от греческого слова parametron - отмеривающий).

Задания с параметром встречаются в школьных учебниках с 7 по 11 класс. Просто при этом не звучит само слово «параметр». Например, в теме «Квадратные уравнения» мы отвечаем на вопросы «При каких целых значениях переменной q данное уравнение имеет 2 корня, только 1 корень, не имеет решения» и т.п. Т.е. задания интегрированы, отдельно данный материал можно рассматривать на углубленном уровне. И вот наши учащиеся сталкиваются с заданием части II ЕГЭ профильного уровня. Задача учителя – дать ученику старт с дальнейшим развитием ситуации успеха.

Актуальность данного материала обусловлена количеством баллов за задание с параметром. Тем не менее, при подготовке к ЕГЭ учащиеся либо вообще не хотят начинать тренироваться по теме, либо быстро остывают к этим задачам. Я думаю, что в первую очередь необходимо преодолеть некий психологический барьер, показать ученикам, что решение задач с параметром им по силам. Следовательно, отбор заданий для начала осуществим по принципам: от знакомого к новому, от простого к сложному. Пусть изначально просматриваются этапы решения, само решение не будет перегружено, т.к. из-за громоздких вычислений и большого числа ветвлений можно потерять нить рассуждений. Необходимо выбрать наиболее яркие примеры для графического и аналитического методов решения.

Методом проб и ошибок я пришла к выводу, что лучше всего соблюсти преемственность: в части 2 ОГЭ по математике присутствует задание по теме «Функции и их свойства. Графики функций» (например, (1) требуется построить график функции и (2) определить, при каких значениях m прямая y=m имеет с графиком ровно две общие точки, одну, более двух и т.п.). Пункт (2) сводится к решению системы $\begin{cases} y = f(x), \\ y = m. \end{cases}$ графическим методом.

Как правило, сильные ученики успешно решают такие задачи на ОГЭ. Поэтому имеет смысл начинать рассматривать задания ЕГЭ с параметром, где уравнение можно привести к системе, и решать эту систему далее графически (см. Задачу 1).

Достаточно понятны в решении задачи с уравнениями окружностей, которые можно решать аналитически, используя координатный метод (см. Задачу 2).

В задачах 3 и 4 также присутствуют как графический метод, так и аналитический.

---

[1] Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004

ПРИМЕРЫ СТАРТОВЫХ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Задача №1

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2-8|x|+4-a^2=0$ имеет ровно 2 корня.

Решение: Представим уравнение в виде $4x^2-8|x|+4=a^2$.

Решаем графически систему уравнений $\begin{cases} y = 4x^2 - 8|x| + 4 & (1) \\ y = a^2 & (2) \end{cases}$ аналогично, как в 9 классе.

Преобразуем выражение (1): $y = \begin{cases} 4x^2 + 8x + 4, & x < 0 \\ 4x^2 - 8x + 4, & x \geq 0 \end{cases}$ или $y = \begin{cases} 4(x+1)^2, & x < 0 \\ 4(x-1)^2, & x \geq 0 \end{cases}$

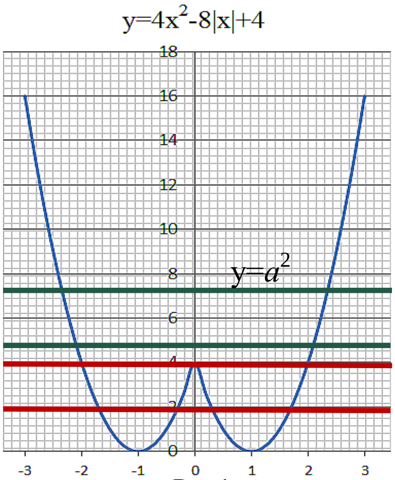
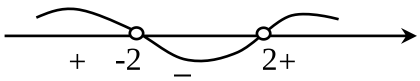


Рис.1

Строим график функции (1): для отрицательных x парабола с вершиной в точке (-1;0), для положительных x – с вершиной (1;0). Далее строим линии уровня (2) $y=a^2$, находим значения a^2, при которых точек пересечения линий уровня с графиком функции (1) будет ровно две.

Условие будет выполнено, если $\left[\begin{array}{l} a^2 > 4, \\ a^2 = 0. \end{array}\right.$

$a^2>4 \Leftrightarrow a^2-4=0 \Leftrightarrow (a-2)(a+2)=0$



$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a < -2, \\ a > 2, \\ a = 0. \end{array}\right.$

Ответ: $a \in (-\infty;-2) \cup \{0\} \cup (2;+\infty)$.

Задача №2

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений $\begin{cases} (x-3a-4)^2 + (y-a+2)^2 = 1, & (1) \\ (x-4a-3)^2 + (y+3)^2 = 9. & (2) \end{cases}$

Решение: Очевидно, что уравнения (1) и (2) – уравнения окружностей радиусов соответственно 1 и 3.

$$\begin{cases} (x-(3a+4))^2 + (y-(a-2))^2 = 1, & (1) \\ (x-(4a+3))^2 + (y-(-3))^2 = 3^2. & (2) \end{cases}$$

Окружность (1): центр – точка $O_1(3a+4;\ a-2)$, радиус $r_1=1$; окружность (2): центр – точка $O_2(4a+3;\ -3)$, радиус $r_2=3$.

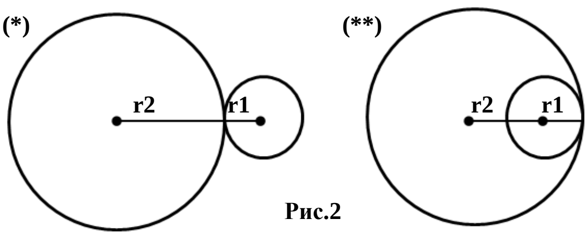


Рис.2

Поскольку система имеет единственное решение, то у данных окружностей одна общая точка, причем касание может быть как внешнее, так и внутреннее (см. рис.2). При этом расстояние между их центрами

$$O_1O_2 = \begin{cases} r_2 + r_2 & \text{при внешнем касании, } (*) \\ r_2 - r_1 & \text{при внутреннем касании } (**) \end{cases}$$; $r_1+r_2=4$, $r_2-r_1=2$

Формула для расстояния между точками $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$O_1O_2^2=(4a+3-3a-4)^2+(-3-a+2)^2=(a-1)^2+(a+1)^2=a^2-2a+1+a^2+2a+1=2a^2+2.$

$$\left[\begin{array}{l} 2a^2 + 2 = 16, \\ 2a^2 + 2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a^2 = 14, \\ 2a^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 7, \\ a^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \pm\sqrt{7}, \\ a = \pm 1 \end{array}\right. .$$

Ответ: ± 1 ; $\pm\sqrt{7}$.

Задача №3

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, & (1) \\ y = a(x-1) & (2) \end{cases}$ имеет более двух решений.

Решение: В зависимости от знака выражения под модулем в (1) мы получим 2 линии.

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ 2x - 2y - 2 = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 1 + 2 = 0$

$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1, \\ \quad x^2 + y^2 \geq 1 \ (3) \end{cases}$ - дуга окружности с центром в точке (1; -1) радиуса 1 с ограничением (3) .

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 1, \\ 2x - 2y - 2 = -x^2 - y^2 + 1 \end{cases}$

$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 2y + 1) - 1 - 1 - 2 = 0$

$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5, \\ \quad x^2 + y^2 < 1 \ (4) \end{cases}$ - дуга окружности с центром в точке (-1; 1) радиуса $\sqrt{5}$ с ограничением (4)

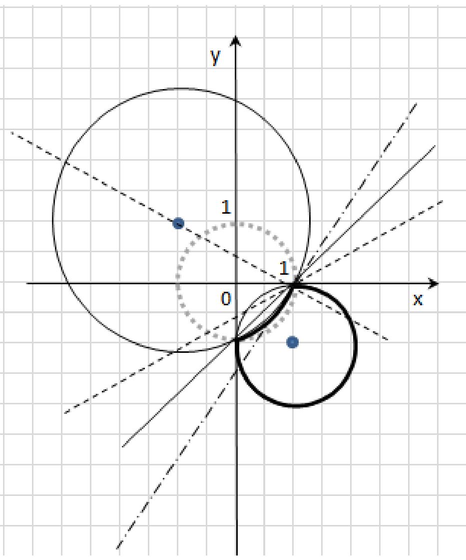


Рис.3

Дуги окружностей, полученных при исследовании уравнения (1), построены с учетом ограничений на рис.3 (4-ая четверть координатной плоскости).

Теперь рассмотрим прямую, заданную уравнением (2). Прямая пересекает оси ОХ и ОУ в точках (1; 0) и (0; -*a*). При *a*=1 прямая (проведена сплошной линией на рис.3) имеет 2 общие точки с дугами окружностей – это точки (1; 0) и (0; -1) – первое крайнее положение.

При уменьшении *a* прямая не будет пересекать данные дуги более, чем в двух точках, одна из которых –

(1; 0).

Для того, чтобы общих точек было больше двух, необходимо достичь еще одного пересечения с дугой большой окружности (r=$\sqrt{5}$). Поэтому ищем второе крайнее положение прямой.

Найдем значение параметра a, при котором прямая (2) является касательной к данной окружности.

Для этого должно выполняться условие $a = y'(1)$

$(y-1)^2 = 5-(x+1)^2$

$|y-1| = \sqrt{5-(x+1)^2}$.

$1-y = \sqrt{5-(x+1)^2} \Rightarrow y = 1-\sqrt{5-(x+1)^2}$.

$$y' = -\frac{-2(x+1)}{2\sqrt{5-(x+1)^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{5-(x+1)^2}}$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{5-4}} = 2$$

Мы нашли второе крайнее положение прямой, при котором прямая является касательной к дуге большой окружности, и решений будет ровно 2.

Таким образом, при значениях a из интервала (1; 2) прямая (2) будет пересекать дуги большей и меньшей окружностей в точках, не лежащих на координатных осях. С учетом точки (1; 0) имеем 3 точки пересечения.

Ответ: $a \in (1; 2)$

Задача №4

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых решением системы неравенств $\begin{cases} a+3x \le 12\,, & (1) \\ a+4x \ge x^2\,, & (2) \\ a \le x & (3) \end{cases}$ является отрезок, длина которого равна 2

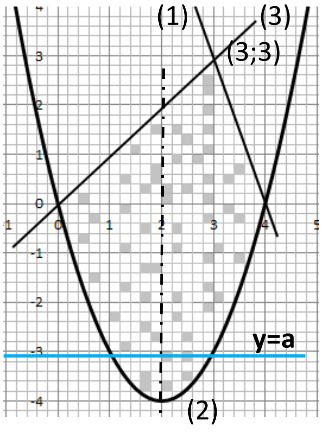


Рис.4

Решение: Перепишем неравенства в системе: $\begin{cases} 12-3x \ge a\,, & (1) \\ x^2-4x \le a\,, & (2) \\ x \ge a & (3) \end{cases}$

Построив графики левых частей неравенств (см. рис.4), находим область ограничений для параметра a. Прямая y=a пересекает область, если $a \in (-4; 3)$.

1) Отрезок длины 2 есть средняя линия треугольника с координатами (0; 0), (3; 3), (4; 0)., т.к. его основание длины 4. Высота данного треугольника равна 3, следовательно, делим

пополам. Прямая y=1,5 содержит среднюю линию треугольника, при этом все те значения x, которые являются решениями нашей системы, лежат на отрезке длины 2.

2) Осуществляя параллельный перенос прямой $y=a$ вниз, приходим к выводу, что есть еще значение a, удовлетворяющее условиям нашей задачи. Парабола $y=x^2-4x$ имеет ось симметрии $x=2$, следовательно, от нее равноудалены на расстояние, равное 1, две точки: $x_1=1$ и $x_2=3$, расстояние между этими точками равно 2.

   $y(1)=y(3)=3^2-4*3=-3$. Прямая y=-3 содержит отрезок длины 2, заключенный между ветвями параболы $y=x^2-4x$. Второе значение параметра найдено.

Ответ: a=1,5 ; -3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В своей работе я рассмотрела несколько заданий, которые, по моему мнению, являются удачными для знакомства учащихся с разделом «Задачи с параметрами». Я построила для себя эту маленькую оптимальную систему, которую считаю наиболее удачной, судя по рефлексии учащихся. Конечно, судить о результативности можно только по ЕГЭ. Так что придется подождать. Если у учителя есть время для изучения данной темы – это хорошо. Он даст ученикам полный расклад: классификацию, приемы решения, пояснит оптимальность отбора методов и т.д. Я исхожу из того, что этого времени практически нет.

Решая данные задачи, учащийся не только строит графики. После построений у него есть возможность почувствовать себя исследователем, выдвигающим предположение о значениях параметра, проверить свою гипотезу аналитически. В руках ученика и геометрические способы, и методы математического анализа, и т.д. Он может использовать все свои знания и умения.

Получение верного результата укрепит в учащемся уверенность в своих силах в ходе подготовки к экзамену, даст дополнительный стимул к получению высокого балла ЕГЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенов А.В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] – М: «Интеллект-Центр», 2023.
2. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004