Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №2 пгт. Кировский
Кировского района» Приморского края

СТАРТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Практика обучения школьников математике

Осинцева Наталья Николаевна,
учитель математики

тел.: 89020545325,
e-mail: *osa8900@mail.ru*

пгт. Кировский
2024 г.

АННОТАЦИЯ

В данной практике автором представлен образовательный маршрут в рамках оптимального банка заданий ЕГЭ по теме «Уравнения и неравенства с параметром», имеющий целью за минимум времени мотивировать выпускника к их решению. Приведены рекомендации и последовательность задач. Практическая часть работы включена в учебно-методическое пособие «Рациональные уравнения и неравенства»[1], которое прошло успешную апробацию в школах Кировского района Приморского края.

[1] https://zhurnalpedagog.ru/servisy/publik/publ?id=19294 – Осинцева Н.Н., Шкурик Т.П.: «Рациональные уравнения и неравенства». Учебно-методическое пособие. – журнал «Педагог», 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ………………………………………………………………….. 4
СТАРТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ……………………………. 5
ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………………… 8
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ…………………………………………………. 9

ВВЕДЕНИЕ

Пусть дано уравнение с двумя переменными F(x, a) = 0. Если в задаче сформулирована цель: «Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение относительно x», то выражение F(x, a) = 0 называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество A – областью изменения параметра a[2] (от греческого слова parametron - отмеривающий).

Задания с параметром встречаются в школьных учебниках основной школы. Просто при этом не звучит само слово «параметр». Например, в теме «Квадратные уравнения» мы отвечаем на вопросы: «При каких целых значениях переменной q данное уравнение имеет 2 корня, только 1 корень, не имеет решения» и т.п. Т.е. задания интегрированы, отдельно данный материал можно рассматривать на углубленном уровне. И вот наши учащиеся сталкиваются с заданием части II ЕГЭ профильного уровня…

Актуальность данного материала обусловлена не только количеством баллов за задание с параметром. Практика направлена на преодоление выпускниками психологического барьера, мешающего включению исследовательского опыта и аналитического мышления; призвана в оптимально короткий срок определить отношение конкретного учащегося к задачам данного типа, его возможностей и способности к решению.

Цели практики:

1. Подготовка выпускника, изучающего математику углубленно, к решению задания с параметром (высокий уровень сложности) профильного ЕГЭ.
2. Развитие навыков исследовательской деятельности.
3. Развитие умений
   3.1. строить геометрические образы уравнений и неравенств на координатной плоскости, применять графические методы для решения уравнений и неравенств с параметрами;
   3.2. приводить аналитическое решение уравнений, неравенств и их систем;
   3.3. выбирать способ решения учебной задачи с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей.

Задача практики – построение образовательного маршрута с последовательным отбором заданий оптимального банка при соблюдении принципов «от знакомого к новому», «от простого к сложному».

Задача учителя – дать ученику старт с дальнейшим развитием ситуации успеха.

---

[2] Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004

СТАРТОВЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

При подготовке к ЕГЭ многие учащиеся либо вообще не хотят начинать тренироваться по теме, либо быстро остывают к задачам с параметром. Необходимо показать ученикам, что решение таких задач им по силам.

Осуществим отбор задач. Пусть изначально просматриваются этапы решения, само решение не будет перегружено, т.к. из-за громоздких вычислений и большого числа ветвлений можно потерять нить рассуждений. Необходимо выбрать наиболее яркие примеры для графического и аналитического методов решения.

Методом проб и ошибок я пришла к выводу, что лучше всего соблюсти преемственность: в части 2 ОГЭ по математике присутствует задание по теме «Функции и их свойства. Графики функций» (например, (1) требуется построить график функции и (2) определить, при каких значениях m прямая y=m имеет с графиком ровно две общие точки, одну, более двух и т.п.). Пункт (2) сводится к решению системы $\begin{cases} y = f(x), \\ y = m. \end{cases}$ графическим методом.

Как правило, сильные ученики успешно решают такие задачи на ОГЭ. Поэтому имеет смысл начинать рассматривать задания ЕГЭ с параметром, где уравнение можно привести к системе, и решать эту систему далее графически (см. Задачу 1).

Достаточно понятны в решении задачи с уравнениями окружностей, которые можно решать аналитически, используя координатный метод (см. Задачу 2).

В задачах 3 – 5 также присутствуют как графический метод, так и аналитический. Практика показала, что учащиеся в первую очередь пытаются строить геометрические образы.

Мы получили следующую **последовательность задач**:

Задача №1

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2-8|x|+4-a^2=0$ имеет ровно 2 корня.

Задача №2

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-3a-4)^2+(y-a+2)^2=1, \\ (x-4a-3)^2+(y+3)^2=9. \end{cases}$$

Задача №3
Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x-1) \end{cases}$ имеет более двух решений.

Задача №4
Найдите все значения параметра а, при каждом из которых решением системы неравенств $\begin{cases} a + 3x \le 12, \\ a + 4x \ge x^2, \\ a \le x \end{cases}$ является отрезок, длина которого равна 2.

Задача №5
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, & (1) \\ y = 3x + a & (2) \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Решение задач 1-4 подробно рассмотрено в публикации «Стартовые задачи с параметром»[3].

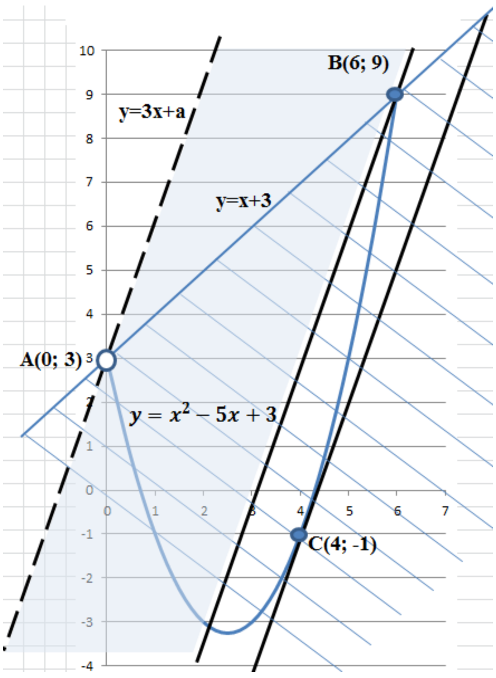

Рис.1

Задача №5 *(№18 демо-варианта профильной математики 2025 года)*

Графический метод решения: Найдем геометрическое место точек, являющихся решениями уравнения (1), затем найдем все такие значения a, при которых прямая (2) имеет ровно 2 пересечения с геометрическими образами решений (1). Все необходимые построения отражены на Рис.1.

Итак, решаем уравнение (1):
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{ll} y = x^2 - 5x + 3 & (*), \\ y = x + 3 & (**), \end{array} \right. \\ x - y + 3 \ge 0 \quad (***). \end{cases}$$

График (*) – парабола. Ветви параболы направлены вверх. Координаты вершины: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} = 2{,}5$; $y_0 = 2.5^2 - 5 \cdot 2{,}5 + 3 = -3{,}25$.

---
[3] https://урок.рф/data/files/p1693054104.pdf - Осинцева Н.Н.: Стартовые задачи с параметром. Методическая разработка, 2023 г.

График (**) – прямая. С учетом ОДЗ (***) $y \leq x + 3$ мы рассматриваем только полуплоскость под прямой (**) (см. рис. 1).

Найдем точки пересечения прямой и параболы: $x^2 - 5x + 3 = x + 3 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow$ x_1=0 и x_2=6 – абсциссы точек пересечения данных линий. Подставив значения x_1 и x_2 в (**), получаем точки A(0;3) и B(6;9). Таким образом, все решения уравнения (1) лежат на прямой (**), а также части параболы (*), соответствующей отрезку $x \in [0; 6]$.

Рассмотрим прямую (2) и ее положение при различных a. Определим значения параметра для крайних положений прямой (точки A и B). В точке A: y(0)=3*0+a=3 $\Rightarrow$ a=3. В точке B: y(6)=3*6+a=9 $\Rightarrow$ a=9-18=-9.

Заметим, что прямая (2), проходящая через точку A (соответствующее значение параметра a=3), имеет только одно пересечение с ГМТ – решений (1). Далее, при уменьшении a до значения -9 (прямая проходит через точку B) включительно, точек пересечения будет две. Таким образом, $a \in [-9; 3)$.

Заметим, что есть еще одно положение прямой, при котором две точки пересечения. Прямая (2), являясь касательной к параболе, пересечет прямую (**). Вычислим абсциссу точки касания: (из $(*)$) $y' = 3$ (из уравнения (2)). 2x-5=3 $\Rightarrow$ x=4. Ордината точки касания: y(4)=4^2-5*4+3=-1. Вычислим значение параметра, при котором прямая (2) касается параболы в точке C(4; -1): 3*4+a=-1 $\Rightarrow$ a=-13.

Ответ: $a \in \{-13\} \cup [-9; 3)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В своей работе я использую рассмотренную ранее подборку заданий, которые, по моему мнению, являются удачными для знакомства учащихся с разделом «Задачи с параметрами». Я построила для себя эту маленькую оптимальную систему с учетом рефлексии учащихся. Если у учителя есть время для изучения данной темы – это хорошо. Он даст ученикам полный расклад: классификацию, приемы решения, пояснит оптимальность отбора методов и т.д. Я исхожу из того, что этого времени практически нет.

Конечно, *судить о результативности можно только по ЕГЭ*. Данная практика отработана за 2 последних года. Учащиеся с высокой мотивацией считают, что предложенный образовательный маршрут дает хороший старт. В течение двух последних лет выпускники решают задачи с параметром на ЕГЭ.

Вывод: решая данные задачи, учащийся не просто строит график и делает вывод. После построений у него есть возможность почувствовать себя исследователем, выдвигающим предположение о значениях параметра, проверить свою гипотезу аналитически. Таким образом, в руках ученика и геометрические способы, и методы математического анализа, и т.д. Он может мобилизовать все свои знания и умения, что положительно отразится в решении других сложных заданий. Достижение верного результата укрепит в учащемся уверенность в своих силах в ходе подготовки к экзамену, даст дополнительный стимул к получению высокого балла ЕГЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенов А.В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: учебное пособие – М: «Интеллект- Центр», 2024.
2. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М.: МИЭТ, 2004.
3. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2025 года по математике. Профильный уровень (проект). – М: «ФИПИ», 2024.